В. Н. Брюшинкин, Н. А. Ходикова

РАЦИОНАЛЬНАЯ РЕКОНСТРУКЦИЯ ПРОИСХОЖДЕНИЯ ТЕОРИИ ПОИСКА ВЫВОДА ИЗ ГИЛЬБЕРТОВСКОЙ ТЕОРИИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ[1]

Проведен историко-логический анализ развития логических исследований, приведшего от гильбертовской теории доказательств к формированию теории поиска вывода. Основным тезисом статьи является утверждение, что это развитие можно рационально реконструировать с точки зрения поризматической модели развития научных теорий, предложенной Б. С. Грязновым.

The analysis of logical investigations development, which resumed in the formation of deduction-search theory on the basis of Hilbert's proof theory, is accomplished from the standpoint of history of logic. The thesis of the paper is that it is possible to supply a rational reconstruction of the development from the standpoint of porismatic model of scientific theories development advances by Boris Gryasnov.

Целью данной статьи является уточнение и детализация на основании историко-логического материала поризматической модели Б. С. Грязнова [8, с. 111—118], особенно той ее части, где идет речь об интерпретации поризма. Мы намерены показать, что специфика логико-математического знания обусловливает необходимость некоторой модификации одного этапа поризматической модели, и, тем не менее, эта модель оказывается достаточно универсальной, чтобы быть применимой к реконструкции происхождения и развития как естественнонаучных, так и логико-математических теорий.

Задача осложняется тем, что сам Б. С. Грязнов дал только общую идею этой модели и на примерах показал ее примени-

---

[1] Статья содержит результаты исследований, проведенных в рамках проекта РФФИ, грант № 05-06-80254-а «Формирование теории поиска вывода».

Брюшинкин В.Н., Ходикова Н.А. Рациональная реконструкция происхождения теории поиска вывода из гильбертовской теории доказательств // РАЦИО.ru. 2009. № 1. С. 117-131

мость для рациональной реконструкции истории науки. Применение этой модели к историко-логическому материалу требует определенной доработки самой модели. В частности, в дополнительном внимании нуждается вопрос о соотношении поризма и интерпретации теории. Применение поризматической модели к развитию дедуктивных наук — логики и математики — требует более точного описания того, как неожиданное утверждение, полученное в рамках одной теории, становится ядром другой — новой — теории. Проблема поризматической модели заключается в том, что при таком подходе новая теория в определенном смысле становится логическим следствием предшествующей теории. Вместе с тем общепризнанно, что новая теория предполагает возникновение нового языка, включающего термины и их отношения, отсутствующие в предшествующей теории, и нового объектного мира теории.

Б. С. Грязнов в своей статье приводит два примера применения поризматической модели к возникновению новой теории: возникновение гелиоцентрической теории в трудах Н. Коперника и возникновение квантовой механики. Первый пример он рассматривает более подробно, а второй только схематически. Для начала мы рассмотрим подробнее пример открытия кванта действия, ставшего началом новой физической теории — квантовой механики. Автор этого открытия Макс Планк, получив так называемую постоянную Планка как чисто синтаксический объект [8, с. 117], придал ей физический смысл как единицы дискретного испускания и поглощения тепловой энергии — кванта действия. Задача определения численного значения постоянной Планка поставила ее в связь с рядом других физических констант и эмпирическими измерениями, связанными с этой системой констант. Планк первым определил численное значение своей постоянной, опираясь на измерения излучения черного тела [11]. Это придало постоянной Планка эмпирическую интерпретацию. Интерпретация данного синтаксического объекта (поризма) порождает новый теоретический объект, на основе которого строится объектный мир новой теории. Сам Планк в дальнейшем пытался встроить полученное таким образом новое понятие в систему классической физики, но эти попытки не привели к успеху. Эйнштейн в 1905 году перенес идею квантованного испускания и поглощения энергии при тепловом излучении на излучение вообще и таким образом обосновал новое учение о свете. Квантовая теория света позволила простейшим образом объяснить ряд физических явлений, считавшихся загадочными, например, фотоэлектрический эффект. В дальнейшем в исследованиях Бора, Гейзенберга и других физиков сложилась квантовая механика — физическая теория, радикально расходящаяся с классическими представлениями.

Проанализированный пример рождения квантовой теории порождает следующую схему:

Исходная теория T_1 **à** множество задач, решаемых в данной теории **à** непредвиденное промежуточное следствие решения одной из задач (поризм) **à** рассогласование поризма с существующей интерпретацией теории **à** новая эмпирическая интерпретация поризма, дающая новый теоретический объект **à** включение нового теоретического объекта в существующую систему понятий или создание новой системы понятий **à** основные положения новой теории T_2 **à** реконструкция проблемы, которую решает теория T_2.

Однако уже пример возникновения комплексных чисел показывает отличия возникновения новой теории в логико-математических науках от того же процесса в эмпирических науках. Главное различие состоит в том, что логико-математические науки, в отличие от эмпирических, не предполагают эмпирической проверки теорий и связанной с ней эмпирической интерпретации [15]. Анализ происхождения комплексных чисел и процесса возникновения теории поиска вывода показывает, что на место такой эмпирической интерпретации в логико-математических науках заступает интерпретация из новой области задач или объектов.

Модифицировав таким образом поризматическую модель происхождения научной теории, мы можем приступить к изложению рациональной реконструкции происхождения теории поиска вывода из гильбертовской теории доказательств[2]. В качестве исходной теории T_1 в данном цикле развития логики мы рассматриваем гильбертовскую теорию доказательств. Сам Гильберт назвал ее также метаматематикой, поскольку здесь речь идет о метауровне рассмотрения конкретных логико-математических исчислений, ставятся и решаются метазадачи, например, доказательства полноты, непротиворечивости и независимости систем аксиом. Таким образом, теория доказательств, предметной областью которой являются формальные логико-математические системы, сама является содержательной метауровневой теорией, в которой изучаются свойства и отношения математических доказательств, формализованных в определенных логико-математических исчислениях[3]. Проведенный методологический анализ показал, что *объектом* гильбертовской теории доказательств является *понятие формального доказательства, которому придана «синтетическая», или «нисходящая», интерпретация*. В рамках первоначальной формулировки гильбертовской теории доказательств такая интерпретация предполагалась как само собой разумеющаяся. Только рассмотрение генценовского доказательства непротиворечивости арифметики и дальнейшего развития методов автоматического доказательства на основе введенных Генценом секвенциальных систем позволило установить тот факт, что принципиальным отличием интерпретации понятия доказательства в гильбертовской теории доказа-

---

[2] Идея такой реконструкции впервые была описана в статье В. Н. Брюшинкина «О возникновении теорий в логике: теория поиска вывода как поризм» [4, с. 17—18].

[3] «Предмет метаматематики состоит в такой абстракции математики, когда математические теории заменяются формальными системами, доказательства — некоторыми последовательностями правильно построенных формул…» (Перевод И. Н. Веселовского исправлен в соответствии с английским оригиналом) [10, с. 5].

тельств является синтетический порядок его рассмотрения, то есть понимание доказательства как некоторого процесса, идущего от аксиом исчисления к доказываемой теореме при помощи применения правил вывода, сформулированных в данной системе. Иного пути доказательства, кроме указанного «синтетического» движения «сверху вниз» — от аксиом, подформул к доказываемой формуле — в аксиоматическом исчислении нет и быть не может. В самом общем виде Гильберт определял доказательство как «вывод какой-либо формулы из определенных аксиом (с помощью логического исчисления)» [7, с. 274]. Поэтому рассмотрение формального объекта «доказательство» вместе со способом его построения «сверху вниз» традиционно воспринималось как нечто само собой разумеющееся. Однако такого рода ассоциация формального доказательства с определенным способом его построения формировала интерпретацию понятия доказательства, которая, как показали дальнейшие исследования в теории доказательств, не является единственно возможной.

Вместе с тем, задолго до Гильберта в методологии математики было известно, что синтетическая интерпретация доказательства как движения «сверху вниз», от аксиом к теоремам, не является единственной. Наряду с методом синтеза (и совместно с ним) при построении реальных математических доказательствах использовался и *метод анализа*. Традиция аналитического подхода к доказательству идет от древнегреческих математических школ Эвдокса и Платона, представители которых «создали так называемый апагогический, или аналитический, метод и формы анализа и синтеза, с помощью которых удалось добиться не только надежных результатов, но и безупречного изложения этих результатов» [17]. Папп Александрийский (III в. н. э.) сформулировал метод анализа в виде свода эвристических правил. Сущность анализа, применявшегося греческими геометрами, следуя Я. Хинтикке и У. Ремезу, можно пояснить следующим образом: «Анализ — метод греческих геометров, использующийся при поиске доказательств теорем… и состоящий в предположении того, что требуется получить в исследовании, откуда это предполагаемое получается, и в продолжении этого процесса до тех пор, пока не будет достигнуто нечто уже известное. За анализом следует синтез, где искомая теорема… устанавливается шаг за шагом обычным образом с помощью прослеживания шагов анализа в обратном порядке» [18, p. I]. Аналитический метод в математике, или «продвижение от конца к началу», — это «очень общий и полезный метод составления плана; однако для того, чтобы ликвидировать разрыв между неизвестным и данными, нам, очевидно, нужны еще какие-то идеи, подсказываемые сущностью вопроса» [14]. Таким образом, можно говорить о том, что описанный метод анализа «является типичным эвристическим методом, поскольку он дает субъекту…определенные указания, направляющие поиск доказательства теоремы, и не гарантирует получения результата» [3, с. 96]. Итак, применение формального аналитического подхода в математических доказательствах может быть успешным лишь при условии привлечения дополнительных эвристических соображений, отражающих содержание задачи. Однако сама идея решения задачи на основании анализа ее структуры является очень заманчивой, и мы можем убедиться, что наиболее полно она реализуется при поиске вывода «снизу вверх», использующем свойство подформульности. Так, Я. Хинтикка и У. Ремез отмечают: «Логика (аналитического) метода соответствует так называемому свойству подформульности, которое является характеристической особенностью методов натуральной дедукции» [18, p. 253]. При этом под «методами натуральной дедукции» Хинтикка и Ремез понимают генценовские секвенциальные исчисления, свободные от сечений, и табличное исчисление Бета.

Исходный момент в рассматриваемой нами поризматической модели — это необходимость решения некоторой частной задачи в рамках теории T_1. В нашем случае Генцен решал задачу доказательства непротиворечивости арифметики в рамках гильбертовской теории доказательств. Для решения этой задачи он счел необходимым отказаться от формализации арифметики при помощи аксиоматических исчислений и предложил новые виды исчислений — натуральные, а затем — секвенциальные. В отличие от гильбертовских исчислений, в которых предполагается минимум правил вывода и большое количество схем аксиом, секвенциальные исчисления содержат единственную, совершенно очевидную аксиому (это основная секвенция) и довольно много правил вывода (фигуры заключения). Для того, чтобы доказать непротиворечивость арифметики, достаточно показать, что в соответствующем секвенциальном исчислении не может быть получено противоречие (т. е. пустая секвенция). В свою очередь, для невозможности вывода пустой секвенции было бы достаточно того факта, что, раз появившись в доказательстве, ни одна формула «исчезнуть» из него не может, а обязательно войдет в последнюю формулу. Этому требованию удовлетворяют все фигуры заключения, кроме сечения. Основная теорема, которую доказал Генцен, говорит о том, что сечение может быть устранено из исчисления с сохранением множества выводимых объектов. В таком новом исчислении без сечения все фигуры заключения обладают свойством *подформульности* — каждая формула над чертой входит в список формул под чертой как отдельная формула или в качестве подформулы более сложной формулы. Учитывая это, можно утверждать, что, начиная с основных секвенций и применяя последовательно фигуры заключения «сверху вниз», построить пустую секвенцию (т. е. противоречие) невозможно. Естественным и весьма важным следствием обнаружения подформульности всех фигур заключения, за исключением сечения, является тот факт, что доказательства в секвенциальных исчислениях без сечения также обладают свойством подформульности.

Итак, свойство подформульности доказательств в исчислениях без сечения появляется как непредвиденное следствие при решении задачи доказательства непротиворечивости арифметики. Эта задача решалась Генценом в рамках гильбертовской теории доказательств, в которой доказательства интерпретируются синтетически как движения «сверху вниз» (попытка вывести пустую секвенцию из основной секвенции). Однако, хотя Генцен при доказательстве различных теорем (в том числе, непротиворечивости арифметики) использует синтетический способ построения вывода (доказательства), он все же допускает возможность аналитического рассмотрения вывода, его построения «снизу вверх»: «Пусть сначала дана нижняя секвенция. Она либо уже является верхней секвенцией, тогда весь вывод состоит из нее одной, либо она является нижней секвенцией некоторой фигуры заключения. Каждая верхняя секвенция этой фигуры заключения снова является либо верхней секвенцией вывода, либо нижней секвенцией следующей фигуры заключения и т. д.» [6, с. 160]. Таким образом, обнаружение у доказательств в генценовском секвенциальном исчислении LK свойства подформульности показало, что доказательство в этом исчислении может строиться как «сверху вниз», так и «снизу вверх». В терминах рассматриваемой модели это обстоятельство вводит новую аналитическую интерпретацию формального доказательства «снизу вверх». Поскольку объект гильбертовской теории доказательств представляет собой понятие формального доказательства вместе с его синтетической интерпретацией «сверху вниз», возможность новой аналитической интерпретации создает возможность нового теоретического объекта [16, с. 147—156]. Поскольку же синтетическая и аналитическая интерпретации противоположны, то новый теоретический объект означает рассогласование с первоначальной интерпретацией объекта теории доказательств и требует развития нового взгляда на доказательства в секвенциальных исчислениях как на объекты, обладающие важными «аналитическими» свойствами. Если в аксиоматических системах доказательства обычно рассматриваются как линейные структуры (последовательности формул), то секвенциальные доказательства (выводы) — это всегда древовидные структуры[4], причем допускающие построение как «сверху вниз», так и «снизу вверх» (если сече-

[4] «Вывод — это древовидная фигура, состоящая из некоторого числа секвенций, с самой нижней конечной секвенцией и несколькими верхними секвенциями, которые должны быть основными секвенциями…» [6, с. 160].

ния устранимы). Последний подход позволяет говорить о возможности построения некоторой систематической процедуры поиска доказательства. Однако аналитическая интерпретация доказательств, основанная на обладания ими свойством подформульности, создает только *возможность* определения процедур поиска доказательств. В действительности возникновение нового теоретического объекта и последующее возникновение на этой основе теории поиска вывода потребовало еще и возникновения *новой области задач* — автоматического доказательства теорем.

Следует отметить, что подобный сдвиг в интерпретации логического формализма, приведший к возникновению новой теории, имел место в исследованиях по аристотелевской силлогистике. Речь идет о замене традиционной экстенсиональной интерпретации силлогистики интенсиональной. В работах В. И. Маркина [12, с. 82—91; 13, с. 125—137] проанализирована интенсиональная интерпретация силлогистики, данная Г. Лейбницем и Н. А. Васильевым. Так, В. И. Маркин замечает: «В традиционной и в современной логике широкое распространение получила идущая от Аристотеля и отчетливо выраженная схоластами трактовка силлогистики как теории, которая исследует связи, возникающие в сфере *объемных* отношений между общими терминами. Силлогистические константы обычно в этой связи рассматриваются как выражающие экстенсиональные отношения между двумя множествами (объемами понятий): константа *a* репрезентирует отношение теоретико-множественного включения класса в класс, константа *i* — наличие общих элементов у двух классов и т. п. Однако в истории логики складывался иной — альтернативный экстенсиональному — подход к интерпретации смыслов категорических суждений, которые составляют предмет исследования в силлогистических теориях. Суть этого подхода заключается в трактовке субъекта и предиката высказывания как понятийных конструкций и их анализе с точки зрения *содержательных*, а не объемных характеристик. Силлогистические константы при этом рассматриваются как знаки отношений между понятиями по содержанию» [13, с. 125]. Для нашего исследования важно, что из такой смены интерпретации возникли два новых вида логических теорий — трансцендентальная логика Канта [2, с. 29—39] и «воображаемая» логика Васильева [13, с. 132—133].

Необходимость появления новой области задач, при решении которых используется новый теоретический объект, для возникновения новой теории демонстрируется от противного на примере аналитических таблиц Э. Бета и модельных множеств Я. Хинтикки как чисто логических способов доказательства. Бет в семантических таблицах и Хинтикка в модельных множествах строили теоретические модели процедуры доказательства, основанные на свойстве подформульности. В качестве теоретического объекта на этом этапе исследований можно рассматривать *дерево вывода*, построение которого осуществляется «снизу вверх». Бет считает такую аналитическую интерпретацию вывода очень важной: «наш подход в значительной мере осуществляет идеал чисто аналитического метода, сыгравшего столь важную роль в философии» [1, с. 195]. Эти модели получили важные применения в логике и философии. Однако к возникновению новой теории исследования Бета и Хинтикки не привели. *Устранение рассогласования интерпретаций* в нашем случае возможно лишь тогда, когда новая интерпретация доказательства «снизу вверх» находит применение на новой же области задач, для решения которых необходим новый теоретический объект, порождаемый аналитической интерпретаций формального доказательства. Такой областью применимости для свойства подформульности стало автоматическое доказательство теорем. При этом формальное доказательство, интерпретированное аналитически, порождает новый теоретический объект — процедуру поиска вывода, которая предусматривает построение *дерева поиска вывода*, содержащего как дерево вывода, так и некоторые «тупиковые» пути, которые в ходе процедуры поиска вывода отсекаются.

С другой стороны, автоматическое доказательство теорем, будучи частью более общей области задач эвристического программирования, первоначально стало использовать другие идеи. Исходя из алгоритмического, но совершенно неэффективного метода Британского музея были попытки получить «менее плохие методы», принимая некоторые «эвристические» соображения, которые иногда дают некоторое сокращение рассуждений и упрощают метод доказательства. В частности, такие «эвристические соображения» были предложены Ньюэлом, Саймоном, Гелернтером и Рочестером [5, с. 145—165].

Однако формировавшееся таким образом поле автоматического доказательства теорем, основанное на идее добавления эвристик к традиционным способам построения формального доказательства, не привело к созданию теории поиска вывода. По этому поводу С. Кангер замечает, что введение эвристик целесообразно отложить до тех пор, «пока мы не будем иметь удовлетворительного метода доказательства в качестве основы для введения эвристических соображений» [9, с. 201].

Оказалось, что исчисления генценовского типа со всеми их свойствами, описанными сначала Генценом, а затем Кангером, Бетом, Хинтиккой и другими, являются наиболее пригодными для того, чтобы быть основой методов автоматического доказательства. Кроме того, важную роль в автоматическом доказательстве логических теорем сыграла теорема Эрбрана. Если Ван Хао использовал в своих программах только идею подформульности, то в более совершенных методах Гилмора, Дэвиса и Патнема реализуется также процедура Эрбрана. На этой основе возникают универсальные методы поиска вывода — метод резолюций Дж. Робинсона и обратный метод С. Ю. Маслова. С. Ю. Масловым были выделены основные свойства процедур поиска логического вывода: подформульность (аналитичность), метапеременность, локальность. Здесь мы можем говорить о возникновении новой теории — *теории поиска логического вывода*, сформировавшейся в результате применения идеи подформульности в исчислениях, свободных от сечений, к решению задач автоматического доказательства теорем.

Однако С. Ю. Маслов показал, что указанные свойства логических исчислений могут быть абстрагированы от класса объектов, у которых они были первоначально обнаружены, и перенесены на более широкий класс процедур поиска вывода в произвольных дедуктивных исчислениях, представленных аппаратом канонических исчислений Э. Поста. Обратный метод, сформулированный первоначально для исчисления предикатов, в отличие от метода резолюций (использующего теорему Эрбрана), можно распространить на произвольные секвенциальные исчисления без правила сечения.

Необходимость искать выводы объектов, отличных от логико-математических теорем, привела к появлению нового теоретического объекта — *поиска вывода в произвольном исчислении*. Для исследования этого объекта применяется соответствующий аппарат — теория исчислений общего типа. На нее распространяются методы, полученные в теории логико-математических исчислений, что и приводит к возникновению теории поиска вывода.

Такое расширение области применимости методов теории поиска вывода позволяет утверждать, что эта теория существенным образом вышла за рамки автоматического доказательства теорем и действительно является самостоятельной теорией.

Итак, для возникновения теории поиска вывода было необходимо выполнение *двух* условий: обнаружение *свойства подформульности* и наличие *новой области задач* автоматического доказательства теорем, которая обеспечила «квазиэмпирическую» интерпретацию нового теоретического объекта, выявление его свойств и распространение этих свойств на более широкий класс дедуктивных систем. Мы убедились, что без переноса новой «аналитической» интерпретации доказательства, основанной на свойстве подформульности, на автоматическое доказательство теорем, она, хоть и дала интересные результаты, не могла привести к появлению новой теории.

В то же время методы автоматического доказательства теорем, не основанные на секвенциальных исчислениях, а пытающиеся реализовать лишь некоторые эвристические соображения, оказались неэффективными. И только применение в этой области идей, основанных на свойстве подформульности, позволило не только создать гораздо более эффективные методы автоматического доказательства, но и привело к возникновению новой теории — теории поиска вывода, являющейся в целом ответом на вопрос, как по исчислению и объекту в языке исчисления искать вывод этого объекта. В свою очередь, теория поиска вывода вывела на новый уровень исследования по моделированию творческих процессов решения задач посредством ЭВМ, а также нашла весьма полезное применение в философии, психологии творчества и в других отраслях знания.

Проведенный анализ показывает, что происхождение теории поиска вывода из гильбертовской теории доказательств допускает рациональную реконструкцию на основе поризматической модели происхождения новой научной теории. Схематически это может быть представлено следующим образом:

Гильбертовская теория доказательств T_1 **à** задача доказательства непротиворечивости формальной арифметики, решаемая в данной теории **à** свойство подформульности как непредвиденное промежуточное следствие решения этой задачи (*поризм*) **à** рассогласование поризма с существующей синтетической интерпретацией **à** аналитическая интерпретация доказательств, обладающих свойством подформульности, порождающая представление доказательства как дерева вывода **à** использование секвенциальных исчислений со свойством подформульности в новой области задач — автоматического доказательства теорем, порождающее новый теоретический объект — дерево поиска вывода **à** появление новой теории T_2 — теории поиска вывода **à** реконструкция проблемы, решаемой теорией поиска вывода (определение по исчислению и объекту в языке исчисления структуры возможных выводов объекта.

Список литературы

1. *Бет Э. В.* Метод семантических таблиц // Математическая теория логического вывода: Сб. науч. тр. / Под ред. А. В. Идельсона и Г. Е. Минца. М.: Наука, 1967.

2. *Брюшинкин В. Н.* Кант и силлогистика. Некоторые размышления по поводу «Ложного мудрствования в четырех фигурах силлогизма» // Кантовский сборник. Калининград, 1986. Вып. 11.

3. *Брюшинкин В. Н.* Логика, мышление, информация. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988.

4. *Брюшинкин В. Н.* О возникновении теорий в логике: теория поиска вывода как поризм // Современная логика: Проблемы теории, истории и применения в науке: Сб. науч. тр. / Под. ред. А.Я Слинина. Л.: Изд-во ЛГУ, 1990.

5. *Гелернтер Г.* Реализация машины, доказывающей математические теоремы // Вычислительные машины и мышление: Сб. науч. тр. // Под ред. Э. Фейгенбаума и Дж. Фельдмана. М. Мир, 1967.

6. *Генцен Г.* Новое изложение доказательства непротиворечивости для чистой теории чисел // Математическая теория логического вывода: Сб. науч. тр./ Под ред. А. В. Идельсона и Г. Е. Минца. М.: Наука, 1967.

7. *Гильберт Д.*, *Бернайс П.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики / Пер. с нем. Н. М. Нагорного; под ред. С. И. Адяна. М.: Наука, 1979.

8. *Грязнов Б. С.* О взаимоотношении проблем и теорий // Грязнов Б. С. Логика, рациональность, творчество. М., 1982.

9. *Кангер С.* Упрощенный метод доказательства для элементарной логики // Автоматическая теория логического вывода. М.: Наука, 1967.

10. *Лакатос И.* Доказательства и опровержения: Как доказываются теоремы. М.: Наука, 1967.

11. *Ларин В. Н.*, *Ежела В. В.* К столетию открытия кванта действия // Вестник РФФИ.

12. *Маркин В. И.* Интенсиональная семантика традиционной силлогистики // Логические исследования. М.: Наука, 2001. Вып. 8.

13. *Маркин В. И.* Силлогистика как интенсиональная логическая теория: Формальная реконструкция идей Г. Лейбница и Н. А. Васильева // Критическое мышление, логика, аргументация: Сб. статей

/ Под общ. ред. В. Н. Брюшинкина, В. И. Маркина. Калининград: Изд-во КГУ, 2003.

14. *Пойа Д*. Математическое открытие / Пер. с англ. В. С. Бермана; под ред. И. М. Яглома. М.: Наука, 1970.

15. *Смирнов В. А*. Логические методы анализа научного знания. М.: Наука, 1987.

16. *Ходикова Н. А*. Истоки возникновения теории поиска вывода: доказательство непротиворечивости арифметики // Критическое мышление, логика, аргументация. Калининград: Изд-во КГУ, 2003.

17. *Цейтен Г. Г*. История математики в древности и в средние века / Пер. с фр. П. Юшкевича. М.; Л.: Государственное технико-теоретическое изд-во, 1932.

18. *Hintikka J., Remes U.* The method of analysis. Dordrecht, 1974.